

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Антипова Наталья Викторовна
Должность: и.о. директора филиала
Дата подписания: 01.09.2026 12:26:13
Уникальный программный ключ:
fae5412acb1bf810dc69e6bc004ac45622b84b3a

Приложение 6
к основной профессиональной образовательной
программе по направлению подготовки
38.03.01 Экономика направленность
(профиль) программы «Бизнес-статистика и аналитика»

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова»
Улан-Баторский филиал при РЭУ им. Г.В. Плеханова

Одобрено
на заседании Совета Улан-Баторского
филиала РЭУ им. Г.В. Плеханова
протокол №11 от 11 июня 2026 г.
Председатель совета
Н.В. Антипова



ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

по дисциплине Б1.О.19 Линейная алгебра

Направление подготовки **38.03.01 Экономика**
(код) (наименование направления)

Направленность (профиль) программы **"Бизнес-статистика и аналитика"**

Уровень высшего образования **Бакалавриат**

Год начала подготовки 2026

Улан-Батор – 2026 г.

Составитель:

к. физ-мат.н., доцент кафедры
высшей математики

М.Н. Максименко

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

по дисциплине Линейная алгебра

ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ С УКАЗАНИЕМ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ И ЭТАПОВ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Формируемые компетенции (код и наименование компетенции)	Индикаторы достижения компетенций (код и наименование индикатора)	Результаты обучения (знания, умения)	Наименование контролируемых разделов и тем
<i>ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач</i>	<i>ОПК-2.1. Использует основные методы, средства получения, представления, хранения и обработки статистических данных</i>	<i>ОПК-2.1. 3-1. Знает методы поиска и систематизации информации об экономических процессах и явлениях.</i>	Раздел 1 Линейная алгебра Тема 1. Введение. Векторы и матрицы как объекты линейного пространства: Предмет, метод, задачи курса. Тема 2. Системы линейных уравнений Тема 3. Системы n -мерных векторов. Тема 4. Общая теория систем линейных уравнений Тема 5. Обратная матрица. Матричные уравнения. Тема 6. Определители матриц. Теорема Крамера. Тема 7. Задача о межотраслевом балансе. Тема 8. Линейные преобразования. Тема 9 Координаты линейного пространства. Матрица преобразования при изменении системы координат Тема 10. Собственные векторы. Тема 11. Квадратичные формы. Тема 12. Знакоопределенность квадратичной формы Раздел 2 Линейное программирование Тема 13. Линейные задачи оптимизации Тема 14. Графический метод решения задач линейного программирования Тема 15. Симплекс-метод решения задач линейного программирования Тема 16. Метод искусственного базиса. Тема 17. Теория двойственности Тема 18. Транспортная задача линейного программирования
		<i>ОПК-2.1. У-1. Умеет работать с национальными и международными базами данных с целью поиска информации, необходимой для решения поставленных экономических задач.</i>	
		<i>ОПК-2.1. У-2. Умеет рассчитывать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы.</i>	
		<i>ОПК-2.1. У-3. Умеет представить наглядную визуализацию данных</i>	

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ

Перечень учебных заданий на аудиторных занятиях

Индикаторы достижения *ОПК-2.1*

Вопросы для опроса

Тема 1 Введение. Векторы и матрицы как объекты линейного пространства: Предмет, метод, задачи курса.

1. Является ли множество векторов с операциями сложения векторов и умножения вектора на число линейным пространством? Ответ обосновать.
2. Найти вектор D : $D = 3A + 2B - 3C$, если $A = (1, 3, 2, 1)$, $B = (2, -3, 4, -5)$, $C = (2, 2, 4, -2)$.
3. Решить векторное уравнение (найти X): $3X + 2A - 6B = \Theta$, где $A = (-3, 6, 0, 9)$, $B = (1, -1, 2, 4)$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Найти матрицу $D = 2A - 4B - 5C$, если,

5. Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 2. Системы линейных уравнений.

1. Верно ли, что любая система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение? Ответ обосновать.
2. Неопределенные системы уравнений решить методом Жордана-Гаусса. Найти два общих и соответствующие им базисных решения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 9x_4 + 3x_5 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 13x_4 + 5x_5 = 11, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 - 4x_5 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 15x_4 + 3x_5 = 13, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 14x_4 + 16x_5 = 6. \end{cases}$$

3. Определенные системы уравнений решить методом Жордана-Гаусса.

$$\begin{cases} 11x_1 + 31x_2 + 31x_3 + 9x_4 = -2, \\ 15x_1 + 35x_2 + 38x_3 + 13x_4 = 11, \\ 17x_1 + 35x_2 + 40x_3 + 15x_4 = 21, \\ 9x_1 + 14x_2 + 18x_3 + 8x_4 = 19. \end{cases} \quad \begin{cases} 22x_1 - 30x_2 + 21x_3 + 4x_4 = -9, \\ 17x_1 - 18x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 2, \\ 16x_1 - 15x_2 + 11x_3 + 3x_4 = 3, \\ 23x_1 - 25x_2 + 18x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

4. Используя метод Жордана-Гаусса исследовать совместность системы уравнений. Если система совместна и определена, то найти ее решение. Если система совместна и неопределена, найти два общих и соответствующие им базисные решения.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases} \quad \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

5. Какая система линейных уравнений называется однородной?

Тема 3. Системы n -мерных векторов.

1. Систему векторов

$$\alpha_1 = (0, -1, 2, 0), \alpha_2 = (0, 4, -8, -2), \alpha_3 = (1, 2, -3, 5), \alpha_4 = (2, 3, -4, 4), \alpha_5 = (1, 2, -3, 3)$$

преобразовать методом Гаусса в квазидиагональную.

2. Выяснить, разлагается ли вектор β по системе векторов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\beta = (5, 1, 5, 3), \alpha_1 = (3, 1, 2, 2), \alpha_2 = (7, 2, 1, 3), \alpha_3 = (-5, -2, -1, -3), \alpha_4 = (11, 3, 3, 5)$$

3. Выяснить, является ли система векторов

$$\alpha_1 = (0, 1, 1, 0), \alpha_2 = (1, 1, 3, 1), \alpha_3 = (1, 3, 5, 1), \alpha_4 = (0, 1, 1, -2)$$

линейно зависимой или линейно независимой:

4. Найти базис системы векторов $\alpha_1 = (1, 2, 1), \alpha_2 = (2, 1, 3), \alpha_3 = (1, 5, 0), \alpha_4 = (2, -2, 4)$

и векторы, не входящие в базис, разложить по базису.

5. Сколько базисов может иметь линейно независимая система векторов?

Тема 4. Общая теория систем линейных уравнений.

1. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 4x_5 + 8x_6 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 4x_5 + 12x_6 = 0, \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 + x_5 - 7x_6 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 5x_5 - 7x_6 = 0. \end{cases}$$

2. Сформулировать теорему об общем решении неоднородной системы уравнений $AX = B$

3. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и записать общее решение исходной системы уравнений в векторном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 12, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 10x_5 = 11, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 9, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 8. \end{cases}$$

4. Если система совместна, что можно сказать о ранге матрицы системы и ранге матрицы расширенной системы

5. Для условия задачи 3 выразить правую часть как линейную комбинацию левых частей и, используя задачу 4, сделать вывод о ранге матрицы и расширенной матрицы системы.

Тема 5. Обратная матрица. Матричные уравнения.

1. Какие матрицы имеют обратную?

2. Для следующих матриц найти обратные матрицы. Результаты проверить умножением матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где

5. Решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тема 6. Определители матриц. Теорема Крамера.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Имеет ли определитель матрица

2. Вычислить определитель матрицы: $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Найти обратную матрицу, используя определитель:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение $X \cdot A = B$, где обратную матрицу с помощью определителя.

5. Решить систему уравнений, используя формулы Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Тема 7. Задача о межотраслевом балансе.

1. В чем экономический смысл задачи о межотраслевом балансе?

2. Какая матрица называется продуктивной?

Для исходных данных сделать следующие задания

$$X = \begin{pmatrix} 152 & 408 \\ 76 & 204 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 760 \\ 680 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}^* = \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \end{pmatrix}$$

3. Составить матрицу A коэффициентов прямых затрат.

4. Используя матричную запись, вычислить вектор $\bar{y}$ объемов конечного продукта предприятий при заданных объемах производства $\bar{x}$.

5. Решив матричное уравнение $(E - A)\bar{x} = \bar{y}$, найти $\bar{x}^*$ план производства предприятий, обеспечивающий новый план выпуска объемов конечного продукта $\bar{y}^*$ через n лет. Определить при этом затраты на производство по каждому предприятию и по каждому продукту. Результаты записать в виде таблицы.

Тема 8. Линейные преобразования.

1. Выяснить, является ли линейным преобразование φ , заданное вектором $\varphi(x)$ как функцией координат вектора x : $\varphi(x) = (x_2 + x_3; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2 + x_3)$

2. Выяснить, является ли линейным преобразование φ , заданное вектором $\varphi(x)$ как функцией координат вектора x : $\varphi(x) = (2x_1 + x_2; x_1 + x_3; x_3^2)$

3. Для тех преобразований, которые являются линейными, найти их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты векторов x и $\varphi(x)$.

4. Доказать, что существует единственное линейное преобразование трехмерного пространства, переводящее векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3 , и найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

$$\begin{aligned} a) \quad a_1 &= (2; 3; 5) \quad a_2 = (0; 1; 2) \quad a_3 = (1; 0; 0) & b_1 &= (1; 1; 1) \quad b_2 = (1; 1; -1) \quad b_3 = (2; 1; 2) \\ b) \quad a_1 &= (2; 0; 3) \quad a_2 = (4; 1; 5) \quad a_3 = (3; 1; 2) & b_1 &= (1; 2; -1) \quad b_2 = (4; 5; -2) \quad b_3 = (1; -1; 1) \end{aligned}$$

5. Показать, что дифференцирование является линейным преобразованием пространства всех многочленов степени $\leq n$ от одного неизвестного и найти матрицу этого преобразования в базисе: $1, x, x^2, \dots, x^n$

Тема 9 Координаты линейного пространства. Матрица преобразования при изменении системы координат.

1. Как изменится матрица линейного преобразования, если в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ поменять местами два вектора e_i и e_j ?

2. Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$(1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 3 \ 0 \ -1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 5 \ 2 \ 3 \ 1 \ 1 \ 3)$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе $e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

3. Линейное преобразование φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$(15 \ -11 \ 5 \ 20 \ -15 \ 8 \ 8 \ -7 \ 6)$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе $e_1 + 3e_2 + e_3, 3e_1 + 4e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3$

4. Линейное преобразование φ в базисе $a_1 = (8; -6; 7), a_2 = (-16; 7; -13), a_3 = (9; -3; 7)$ имеет матрицу

$$(1 \ -18 \ 15 \ -1 \ -22 \ 15 \ 1 \ -25 \ 22)$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе $b_1 = (1; -2; 1), b_2 = (3; -1; 2), b_3 = (2; 1; 2)$

5. Доказать, что матрицы одного и того же линейного преобразования в двух базисах совпадают тогда и только тогда, когда матрица перехода от одного из этих базисов к другому перестановочна с матрицей этого линейного преобразования в одном из данных базисов.

Тема 10. Собственные векторы.

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Записать матрицу T , приводящую матрицу A из задания 1 к диагональному виду. Найти произведение матриц $T^{-1}AT$.

4. Записать матрицу T , приводящую матрицу A из задания 2 к диагональному виду. Найти произведение матриц $T^{-1}AT$.

5. Объяснить полученный результат как матрицу преобразования в новом базисе, используя тему 9.

Тема 11. Квадратичные формы.

1. Записать матрицу квадратичной формы:

$$F(X) = 3x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

2. Квадратичную форму $F(X)$ записать в новой системе координат, если преобразование координат задано системой уравнений:

$$F(X) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 8x_2x_3 + 5x_3^2; \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

3. Квадратичную форму $F(X) = X^T A X$ привести к каноническому виду $F(Y) = Y^T A^* Y$.

$$F(X) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

4. Найти матрицу C преобразования $X = CY$, приводящего $F(X)$ к $F(Y)$ для данных задания 3.

5. Является ли матрица квадратичной формы обязательно симметричной?

Тема 12. Знакоопределенность квадратичной формы.

1. Используя критерий Сильвестра, определить характер знакоопределенности квадратичной формы:

$$F(X) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_1x_3 + 12x_2x_3 + 9x_3^2.$$

2. Используя критерий Сильвестра, определить характер знакоопределенности квадратичной формы: $F(X) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_3^2$.

3. Используя критерий Сильвестра, определить характер знакоопределенности квадратичной формы: $F(X) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3 - 7x_3^2$

4. Используя критерий Сильвестра, определить характер знакоопределенности квадратичной формы: $F(X) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$

5. Используя критерий Сильвестра, определить характер знакоопределенности квадратичной формы: $F(X) = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 50x_3^2$

Тема 13. Линейные задачи оптимизации.

1. Что называется задачей линейного программирования?

2. Какой вид имеет задача

$$Z(X) = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ 8x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 0. \end{cases}$$

3. Привести задачу 2 к канонической форме записи.

4. Какой вид имеет задача

$$Z(X) = 6x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34, \\ x_j \geq 0 \quad \forall j. \end{cases}$$

5. Привести задачу 4 к симметрической форме записи.

Тема 14. Графический метод решения задач линейного программирования.

1. В какой форме записи должна быть задача с двумя переменными, чтобы ее можно было решить графическим методом?

2. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$Z(X) = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ 8x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 0. \end{cases}$$

3. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4. \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0.$$

6. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0 \quad \forall j. \end{cases}$$

7. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$Z(X) = 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = 4, \\ 7x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0 \quad \forall j. \end{cases}$$

1.

Тема 15. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

1. Найти начальное опорное решение и путём перебора опорных решений определить оптимальное решение.

$$Z(X) = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

2. Найти начальное опорное решение и путём перебора опорных решений определить оптимальное решение

$$Z(X) = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 14, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 18, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

3. Решить симплексным методом:

$$Z(X) = x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

4. Решить симплексным методом:

$$Z(X) = -11x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 + 5x_3 + x_4 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad Z(X) = -11x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \rightarrow \min,$$

5. Решить симплексным методом:

$$Z(X) = -3x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 14, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 16, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тема 16. Метод искусственного базиса.

1. Задачи линейного программирования решить с использованием метода искусственного базиса.

$$Z(X) = -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

2. Задачи линейного программирования решить с использованием метода искусственного базиса:

$$Z(X) = x_2 + 5x_3 + 2x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 6, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

3. . Задачи линейного программирования решить с использованием метода искусственного базиса.

$$Z(X) = 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 8, \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

4. Задачи линейного программирования решить с использованием метода искусственного базиса

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

5. Задачи линейного программирования решить с использованием метода искусственного базиса

$$Z(X) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Тема 17. Теория двойственности.

1. Составить двойственную задачу к следующей задаче:

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geq 1, \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

2. Решить двойственную задачу к задаче из задания 1 и, используя первую теорему двойственности, найти решение исходной задачи.

3. Для следующей задачи составить двойственную, решить ее графическим методом:

$$Z(X) = 5x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} -2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

4. Для задачи из задания 3, используя вторую теорему двойственности, найти решения исходной задачи.

5. Для задачи из задания 3 найти решение графическим способом, не используя теорему двойственности и сравнить результат. Совпали ли значения целевой функции в исходной и двойственной задач? Результат прокомментировать.

Тема 18. Транспортная задача линейного программирования.

1. Составить математические модели транспортных задач:

$a_i \quad b_j$	40	20
20	7	4
30	5	3
10	6	8

2. Составить начальное опорное решение, используя метод северо-западного угла:

$a_i \quad b_j$	20	30	30	20
23	4	3	6	5
38	3	4	5	6
39	2	5	4	7

3. Составить начальное опорное решение, используя метод минимальной стоимости:

$a_i \quad b_j$	20	30	30	20
23	4	3	6	5
38	3	4	5	6
39	2	5	4	7

4. Решить методом потенциалов транспортную задачу с правильным балансом:

$a_i \quad b_j$	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

5. Решить методом потенциалов транспортную задачу с неправильным балансом:

$a_i \quad b_j$	200	400	400	800
200	1	6	9	3
400	3	2	2	4
600	4	5	4	7
200	1	4	3	9

Тематика групповых дискуссий

Тема 1 Введение. Векторы и матрицы как объекты линейного пространства: Предмет, метод, задачи курса.

1. Являются ли непрерывные функции с операциями сложения и умножения на число линейным пространством?
2. Являются ли матрицы одной размерности с операциями сложения и умножения на число линейным пространством? Тот же вопрос для операции умножения матриц.

Тема 2. Системы линейных уравнений.

1. Любую ли систему линейных уравнений можно решить методом Гаусса?
2. Может ли система линейных уравнений иметь ровно два решения?

Тема 3. Системы n-мерных векторов.

1. Может один базис системы векторов содержать три вектора, а другой базис той же системы векторов содержать четыре вектора?
2. Могут три компланарных вектора быть линейно независимыми? А может ли система, состоящая из пяти векторов и содержащая три компланарных вектора быть линейно независимой?

Тема 4. Общая теория систем линейных уравнений.

1. Что такое расширенная матрица системы линейных уравнений?
2. Образуют ли подпространство все решения одной однородной системы линейных уравнений?

Тема 5. Обратная матрица. Матричные уравнения.

1. Каждая ли матрица имеет обратную?
2. Может ли матричное уравнение иметь три решения?

Тема 6. Определители матриц. Теорема Крамера.

1. Любую ли систему линейных уравнений можно решить методом Крамера?
2. Может одна и та же матрица иметь два различных определителя?

Тема 7. Задача о межотраслевом балансе.

1. Примеры экономических задач, для решения которых применяются методы линейной алгебры
2. Модель Леонтьева, продуктивные матрицы.

Тема 8. Линейные преобразования.

1. Сколько существует преобразований трехмерного пространства, переводящего три линейно независимых вектора в другие три линейно независимых вектора?
2. Показать, что линейные преобразования n-мерного пространства относительно сложения и умножения на число сами образуют линейное пространство. Найти его размерность.

Тема 9 Координаты линейного пространства. Матрица преобразования при изменении системы координат.

1. Если T – матрица перехода от старого базиса к новому базису, то как связаны координаты одного и того же вектора в старом базисе и новом базисе?
2. Если T – матрица перехода от старого базиса к новому базису, то как связаны матрицы A и B одного и того же линейного преобразования в старом базисе и новом базисе?

Тема 10. Собственные векторы.

1. Два собственных вектора $F(\lambda_1)$ и $F(\lambda_2)$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1 \neq \lambda_2$ характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$ матрицы A , являются ли линейно независимыми?
2. Привести пример применения собственных векторов в экономике.

Тема 11. Квадратичные формы.

1. Какими свойствами обладает матрица квадратичной формы?
2. Любую ли матрицу можно привести к диагональному виду?

Тема 12. Знакоопределенность квадратичной формы.

1. Сформулировать критерий Сильвестра.
2. Если квадратичная форма удовлетворяет критерию Сильвестра, то может ли она быть приведена к каноническому виду?

Тема 13. Линейные задачи оптимизации.

1. Задача линейного программирования: классические задачи.
2. Если задача имеет симметрическую форму записи, может ли она быть приведена к канонической форме?

Тема 14. Графический метод решения задач линейного программирования.

1. Любую ли задачу с двумя переменными можно решить графическим методом?
2. Если дана задача с n переменными в канонической форме, то какое условие для числа уравнений должно выполняться, чтобы ее можно было решить графическим методом?

Тема 15. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

1. Если задача линейного программирования не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то какой критерий в симплекс-методе для этого случая?
2. Как понять, что задача линейного программирования имеет бесконечное множество решений по строке целевой функции?

Тема 16. Метод искусственного базиса.

1. Как понять, что задача линейного программирования не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений?
2. Каковы преимущества метода искусственного базиса перед симплекс-методом?

Тема 17. Теория двойственности.

1. Если один предприниматель хочет продать свой бизнес, а другой купить его, то как с помощью принципа двойственности может быть найдена равновесная цена?
2. Если двойственная задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений, то какой вывод можно сделать про исходную задачу?

Тема 18. Транспортная задача линейного программирования.

1. Сформулировать необходимое и достаточное условие возможности решения транспортной задачи
2. На практике часто бывает баланс неправильным, как в этом случае решить транспортную задачу?

Критерии оценки (в баллах):

- 10 баллов по результатам опросов и 10 баллов за участие в групповых дискуссиях выставляется обучающемуся, если он правильно и полно отвечает на все вопросы и активно участвует в дискуссии, демонстрируя высокую способность понимать проблемы и критически их анализировать, продемонстрирован высокий уровень понимания материала; принимает обоснованные оптимальные решения; уровень освоения компетенций соответствует продвинутому уровню.
- 5 - 9 баллов по результатам опросов и 5 - 9 баллов за участие в групповых дискуссиях выставляется обучающемуся, если он частично правильно и/или неполно отвечает на большую часть вопросов и эпизодически участвует в дискуссии, демонстрируя хорошую способность понимать проблемы и критически их анализировать, продемонстрирован хороший уровень понимания материала; принимает обоснованные оптимальные решения; уровень освоения компетенций соответствует повышенному уровню.
- 1 - 4 балла по результатам опросов и 1 - 4 балла за участие в групповых дискуссиях выставляется обучающемуся, если он частично правильно и/или неполно отвечает на некоторые вопросы и редко участвует в дискуссии, демонстрируя невысокую способность понимать проблемы и критически их анализировать, продемонстрирован средний уровень понимания материала; принимает не всегда обоснованные оптимальные решения; уровень освоения компетенций соответствует базовому уровню.
- 0 баллов по результатам опросов и 0 баллов за участие в групповых дискуссиях по каждой теме выставляется обучающемуся, если он не отвечает на вопросы и не участвует в дискуссии, демонстрируя неспособность понимать проблемы и критически их анализировать, продемонстрирован низкий уровень понимания материала. Компетенции не сформированы.

Задания для текущего контроля

Комплект заданий для контрольной работы

Индикаторы достижения ОПК-2.1

Тема 1 Введение. Векторы и матрицы как объекты линейного пространства: Предмет, метод, задачи курса.

Вариант 1.

Выполнить следующие действия: $A^2 + 2A - 3E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вариант 2.

Выполнить следующие действия:

$A^2 - B^2$ и $(A - B) \cdot (A + B)$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Тема 5. Обратная матрица. Матричные уравнения.

Вариант 1.

Решить уравнение $AX=B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Вариант 2.

Решить уравнение $XA=B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Тема 8. Линейные преобразования.**Вариант 1.**

Составить матрицу линейного преобразования: $\varphi(e_1, e_2, e_3) = (2e_1 + 3e_2, e_3, 4e_2 - 5e_3)$.

Вариант 2.

Составить матрицу линейного преобразования: $\varphi(e_1, e_2, e_3) = (-e_1 + 2e_2 - 7e_3, e_1, -2e_2)$

Тема 11. Квадратичные формы.**Вариант 1.**

Квадратичную форму $F(X) = X^T A X$ привести к каноническому виду $F(Y) = Y^T A^* Y$. Найти матрицу C преобразования $X = CY$, приводящего $F(X)$ к виду $F(Y)$.

$$F(X) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2.$$

Вариант 2.

Квадратичную форму $F(X) = X^T A X$ привести к каноническому виду $F(Y) = Y^T A^* Y$. Найти матрицу C преобразования $X = CY$, приводящего $F(X)$ к виду $F(Y)$.

$$F(X) = x_1^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2.$$

Тема 14. Графический метод решения задачи линейного программирования.**Вариант 1.**

Решить задачу линейного программирования графическим методом:

$$Z(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12. \end{cases}$$

Вариант 2.

Решить задачу линейного программирования графическим методом:...

$$Z(X) = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 0, \\ 3x_1 + x_2 \leq 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20, \\ x_1 - x_2 \geq 0. \end{cases} \dots$$

Тема 18. Транспортная задача.

Вариант 1.

Найти начальное опорное решение методом минимальной стоимости

$a_i \quad b_j$	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

Вариант 2.

Найти начальное опорное решение методом минимальной стоимости

$a_i \quad b_j$	10	10	5	8	7
7	4	6	8	3	2
13	5	3	4	6	4
20	3	2	5	7	5

Критерии оценки (в баллах):

10 баллов - выставляется обучающемуся, если он правильно выполнил все задания, показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении заданий в рамках усвоенного учебного материала; правильное использование алгоритма выполнения действий, отличная логика рассуждений, неординарность подхода к решению, уровень освоения компетенций соответствует продвинутому уровню.

8 баллов - выставляется обучающемуся, если он выполнил все задания с небольшими неточностями, показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении заданий в рамках усвоенного учебного материала; правильное использование алгоритма выполнения действий, отличная логика рассуждений, уровень освоения компетенций соответствует повышенному уровню.

6 баллов - выставляется обучающемуся, если он выполнил более 50 % заданий с существенными неточностями, показал удовлетворительное владение навыками применения полученных знаний и умений при решении заданий в рамках усвоенного учебного материала; частично правильное использование алгоритма выполнения действий, уровень освоения компетенций соответствует базовому уровню.

3 балла - выставляется обучающемуся, если он выполнил менее 50 % заданий, продемонстрировал недостаточный уровень владения умениями и навыками при решении заданий в рамках усвоенного учебного материала; компетенции сформированы частично.

Типовые расчетно-аналитические задания

Тема 2 Системы линейных уравнений

1. Систему уравнений привести к равносильной разрешенной системе, включив в набор разрешенных неизвестных x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 + 13x_5 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 18x_5 = 18. \end{cases}$$

2. Для условия задания 1 записать общее решение
3. Для условия задания 2 найти соответствующее базисное решение.
4. Для условия задания 1 перерешить систему и записать новое общее решение.
5. Для условия задания 4 найти соответствующее базисное решение.

Тема 3. Системы n -мерных векторов.

1. Найти базис для системы векторов

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Найти ранг системы векторов из задания 1.
3. Для системы векторов из задания 1 перейти к новому базису.
4. Записать разложения векторов из задания 1 по найденным базисам.
5. Является ли заданная система векторов линейно зависимой или нет?

Тема 4. Общая теория систем линейных уравнений

1. Для системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_5 + 2x_6 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 6x_6 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 + 6x_6 = 2, \\ \quad + 4x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 2x_6 = -10. \end{cases}$$

записать расширенную матрицу системы.

2. По теореме Кронекера-Капелли определить является ли система из задания 1 разрешенной?
3. Составить соответствующую однородную систему линейных уравнений и найти ее ФСР.
4. Составить общее решение исходной системы с помощью найденной ФСР.
5. Образуют ли подпространство все решения исходной системы?

Тема 6. Определители матриц. Теорема Крамера.

Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 12x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 33, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 23, \\ 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 18. \end{cases}$$

1. Записать расширенную матрицу системы.
2. Вычислить определитель матрицы, используя свойства определителя
3. Вычислить все определители, необходимые для решения системы

4. Используя формулы Крамера, решить систему
5. Сделать проверку

Тема 7. Задача о межотраслевом балансе.

Даны условия:

$$X = \begin{pmatrix} 246 & 174 \\ 164 & 116 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 820 \\ 580 \end{pmatrix}, \quad \bar{y}^* = \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

1. Составить матрицу A коэффициентов прямых затрат.
2. Используя матричную запись, вычислить вектор $\bar{y}$ объемов конечного продукта предприятий при заданных объемах производства $\bar{x}$.
3. Решив матричное уравнение $(E - A)\bar{x} = \bar{y}$, найти $\bar{x}^*$ план производства предприятий, обеспечивающий новый план выпуска объемов конечного продукта $\bar{y}^*$ через n лет.
4. Определить при этом затраты на производство по каждому предприятию и по каждому продукту.
5. Результаты записать в виде таблицы.

Тема 10. Собственные векторы.

Дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A .
2. Записать матрицу T , приводящую матрицу A к диагональному виду.
3. Найти произведение матриц $T^{-1}AT$.
4. Убедиться, что полученная матрица состоит из собственных значений.
5. Объяснить совпадение

Тема 15. Симплекс-метод.

Решите задачу линейного программирования симплексным методом:

$$\begin{aligned} Z(X) &= 3x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \forall j. \end{aligned}$$

Тема 16. Метод искусственного базиса.

Решите задачу линейного программирования методом искусственного базиса:

$$\begin{aligned} Z(X) &= -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 \rightarrow \min, \\ \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \forall j. \end{aligned}$$

Тема 17. Теория двойственности.

Для задачи линейного программирования

$$Z(X) = -2x_1 + x_2 + 8x_3 - 2x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \forall j.$$

1. Составить двойственную модель
2. Решить ее любым способом
3. С помощью первой теоремы двойственности найти решение исходной задачи
4. С помощью второй теоремы двойственности найти решение исходной задачи
5. Убедиться, что результаты совпадают

Тема 18. Транспортная задача линейного программирования.

Решить задачу методом потенциалов

$a_i \quad b_j$	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

Критерии оценки (в баллах):

- **10 баллов** выставляется обучающемуся, если правильно выполнены все задания по каждой теме, продемонстрирован высокий уровень владения материалом, проявлены превосходные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий. Уровень освоения компетенций соответствует продвинутому уровню.

- **6 баллов** - выставляется обучающемуся, если правильно выполнена большая часть заданий по каждой теме, присутствуют незначительные ошибки, продемонстрирован хороший уровень владения материалом, проявлены средние способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий. Уровень освоения компетенций соответствует повышенному уровню.

- **4 балла** - выставляется обучающемуся, если задания выполнены более чем на 50 % по каждой теме, присутствуют серьезные ошибки, продемонстрирован удовлетворительный уровень владения материалом, проявлены низкие способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий. Уровень освоения компетенций соответствует базовому уровню.

- **2-1 балл** выставляется обучающемуся, если задания выполнены менее чем на 50 % по каждой теме, продемонстрирован неудовлетворительный уровень владения материалом, проявлены недостаточные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий. Компетенции сформированы частично.

Задания для творческого рейтинга

Темы индивидуальных и/или групповых проектов

Индикаторы достижения: *ОПК-2.1*

Тема 10. Собственные векторы.

- Использование собственных векторов в экономике.

Тема 18. Транспортная задача линейного программирования.

- Использование модели транспортной задачи в других экономических приложениях

Критерии оценки (в баллах):

20 - 15 баллов выставляется обучающемуся, если в работе содержатся элементы научного творчества и делаются самостоятельные выводы, достигнуты все результаты, указанные в задании, качество оформления отчета соответствует требованиям и при защите обучающийся проявил отличное владение материалом работы и способность аргументировано отвечать на поставленные вопросы по теме работы. Уровень освоения компетенций соответствует продвинутому уровню.

14 - 10 баллов выставляется обучающемуся, если в работе достигнуты все результаты, указанные в задании, качество оформления отчета соответствует требованиям и при защите обучающийся проявил хорошее владение материалом работы и способность аргументировано отвечать на поставленные вопросы по теме работы. Уровень освоения компетенций соответствует повышенному уровню.

9 - 4 балла выставляется обучающемуся, если в работе достигнуты основные результаты, указанные в задании, качество оформления отчета в основном соответствует требованиям и при защите обучающийся проявил удовлетворительное владение материалом работы и способность отвечать на большинство поставленных вопросов по теме работы. Уровень освоения компетенций соответствует базовому уровню.

3 - 2 балла выставляется обучающемуся, если в работе не достигнуты основные результаты, указанные в задании, качество оформления отчета не соответствует требованиям, при защите обучающийся проявил неудовлетворительное владение материалом работы и не смог ответить на большинство поставленных вопросов по теме работы. Компетенции сформированы частично.

МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ЭТАПЫ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПЕТЕНЦИЙ ВО ВРЕМЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Структура экзаменационного билета

Наименование оценочного средства	Максимальное количество баллов
Вопрос 1.	5 баллов
Задание 1.	7 баллов
Задание 2.	7 баллов
Задание 3.	7 баллов
Задание 4.	7 баллов
Задание 5.	7 баллов

Задания, включаемые в экзаменационный билет

Типовой перечень вопросов к экзамену:

1. Линейное пространство как основной объект изучения курса линейной алгебре. Аксиоматика линейного пространства.
2. Пространство n -мерных точек R^n . Векторы в пространстве R^n . Умножение вектора на число и сложение векторов.
3. Правило треугольника. Скалярное произведение векторов.
4. Расстояние между точками. Угол между векторами. Критерий равенства n -мерных векторов. Коллинеарные и пропорциональные векторы.
5. Понятие матрицы. Прямоугольные матрицы. Сложение матриц и умножение матрицы на число. Умножение вектора и матрицы. Произведение матриц.
6. Линейное уравнение с n неизвестными. Формы записи системы линейных уравнений. Базисные и свободные неизвестные. Разрешенные системы линейных уравнений. Общее решение системы линейных уравнений. Частное и базисное решение системы линейных уравнений.
7. Равносильные системы линейных уравнений. Метод Гаусса.
8. Теорема о решении однородной системы линейных уравнений.
9. Определение и свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов. Разложение вектора по линейно независимой системе векторов.
10. Теорема Штейница
11. Максимальная линейно независимая часть и базис системы векторов. Отыскание базиса системы векторов методом Гаусса.
12. Определение и свойства ранга системы векторов. Основная теорема о ранге системы векторов. Критерий разложения вектора по системе векторов (в терминах ранга системы векторов).
13. Диагональная и квазидиагональная системы векторов. Линейные комбинации векторов и разложение вектора по системе векторов.
14. Теорема Кронекера-Капелли о совместности системы линейных уравнений.
15. Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальный набор решений (ФНР). Общее решение неоднородной системы линейных уравнений в векторной форме.
16. Произведение матриц. Транспонирование матриц. Обратимая матрица. Невырожденность обратной матрицы. Обратимость невырожденной матрицы. Отыскание обратной матрицы методом Гаусса.
17. Решение матричных уравнений. Ранг матрицы. Преобразования матрицы, не меняющие ее ранга. Теорема о ранге матрицы. Ранг произведения матриц.
18. Определители матриц-гопорядка. Свойства определителя матрицы. Критерий равенства нулю определителя матрицы.
19. Определитель произведения матриц. Теорема Крамера..
20. Линейная модель производства. Формулировка задачи о межотраслевом балансе и ее решение.
21. Понятие продуктивной матрицы. Отношение порядка для продуктивных матриц как бинарное отношение.
22. Определение линейного преобразования. Примеры линейных и нелинейных преобразований.
23. Существование и единственность матрицы линейного преобразования.
24. Координаты линейного пространства.
25. Формула изменения матрицы линейного пространства при изменении системы координат.
26. Определение и свойства собственных векторов и собственных чисел.
27. Применение собственных векторов и собственных чисел в экономике.
28. Диагонализация матрицы приведением к базису из собственных векторов
29. Положительная и отрицательная определенность формы.

30. Закон инерции.
31. Критерий Сильвестра
32. Предмет математического программирования. Математическая модель экономической задачи. Общая задача математического программирования.
33. Примеры составления математических моделей задач линейного программирования. Задача об использовании ресурсов. Задача о рационе.
34. Различные формы записи задач линейного программирования.
35. Приведение общей задачи линейного программирования к каноническому виду.
36. Решение линейных неравенств. Графический метод решения задач линейного программирования с двумя переменными.
37. Графический метод решения задачи линейного программирования с n переменными.
38. Теорема об экстремуме целевой функции задачи линейного программирования.
39. Теорема о существовании опорного решения.
40. Базис опорного решения и теорема о существовании базиса опорного решения
41. Связь между базисом системы векторов условий канонической задачи и базисом опорного решения. Конечность числа опорных решений.
42. Теорема об оптимальных решениях канонической задачи.
43. Свойства симплексной таблицы.
44. Достаточное условие оптимальности опорного решения канонической задачи.
45. Теорема о неограниченности целевой функции.
46. Решение симплексным методом канонической задачи линейного программирования.
47. Теорема о разрешимости канонической задачи.
48. Искусственная задача линейного программирования и ее свойства.
49. Теорема о методе искусственного базиса решения задач линейного программирования.
50. Транспортная задача линейного программирования: содержательная и математическая постановка.
51. Необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи.
52. Свойство системы ограничений транспортной задачи. Взаимосвязь линейной зависимости векторов условий и циклов.
53. Опорное решение транспортной задачи, методы его построения
54. Признак оптимальности опорного решения транспортной задачи.
55. Алгоритм метода потенциалов решения транспортной задачи. Особенности решения транспортной задачи с неправильным балансом.

Типовые задания:

Вариант 1.

Задание 1.

Каноническая, симметрическая и общая форма ЗЛП, приведение общей задачи к канонической.

Задание 2.

Найти разложение всех векторов системы по базису, включающему векторы A_1 и A_2 :

$$A_1 = (1; -5; -13; 0), A_2 = (-2; 7; 14; 5), A_3 = (5; -7; 7; 1), A_4 = (4; -5; 8; 6).$$

Задание 3.

Если система векторов содержит нулевой вектор, может ли она быть линейно независимой? Ответ обосновать.

Задание 4.

Решив задачу графическим методом, в ответе указать значение целевой функции:

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - x_2 \geq -2, \\ 4x_1 - x_2 \leq 16, \\ 2x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Задание 5.

Для данной транспортной задачи определить начальное опорное решение методом минимальной стоимости, определить значение целевой функции и проверить на оптимальность:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

вектор запасов $A=(1,7,8)$; вектор запросов $B=(7,2,6,6)$ и матрица стоимостей:

Вариант 2.

Задание 1.

Теорема Кронеккера-Капелли о совместности системы линейных уравнений.

Задание 2.

Является ли система векторов линейно зависимой или нет, если $A = (-1, 2, 1, 7)$, $B = (1, -7, 1, -6)$, $C = (0, 15, -6, -3)$?

Ответ обосновать...

Задание 3.

Если один вектор системы, состоящей из 4-х векторов, можно разложить по всем остальным векторам системы, то что можно сказать о ее ранге? Вывод обосновать.

Задание 4.

Решив задачу графическим методом, указать значение целевой функции.

$$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0$$

Задание 5.

Для данной транспортной задачи определить начальное опорное решение методом северо-западного угла, определить значение целевой функции и проверить на оптимальность:

вектор запасов $A=(30,40,90)$; вектор запросов $B=(40,20,30,60)$, матрица стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Показатели и критерии оценивания планируемых результатов освоения компетенций и результатов обучения, шкала оценивания

Шкала оценивания		Формируемые компетенции	Индикатор достижения компетенции	Критерии оценивания	Уровень освоения компетенций
85 – 100 баллов	«отлично»	ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач	ОПК-2.1. Использует основные методы, средства получения, представления, хранения и обработки статистических данных	Знает верно и в полном объеме: ✓ методы поиска и систематизации информации об экономических процессах и явлениях Умеет верно и в полном объеме: ✓ работать с национальными и международными базами данных с целью поиска информации, необходимой для решения поставленных экономических задач; ✓ рассчитывать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы; ✓ представить наглядную визуализацию данных	Продвинутый
70 – 84 баллов	«хорошо»	ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач	ОПК-2.1. Использует основные методы, средства получения, представления, хранения и обработки статистических данных	Знает с незначительными замечаниями: ✓ методы поиска и систематизации информации об экономических процессах и явлениях Умеет с незначительными замечаниями: ✓ работать с национальными и международными базами данных с целью поиска информации, необходимой для решения поставленных экономических задач; ✓ рассчитывать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы; ✓ представить наглядную визуализацию данных	Повышенный
50 – 69 баллов	«удовлетворительно»	ОПК-2. Способен	ОПК-2.1. Использует	Знает на базовом уровне, с ошибками:	Базовый

		осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач	основные методы, средства получения, представления, хранения и обработки статистических данных	✓ методы поиска и систематизации информации об экономических процессах и явлениях Умеет на базовом уровне, с ошибками: ✓ работать с национальными и международными базами данных с целью поиска информации, необходимой для решения поставленных экономических задач; ✓ рассчитывать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы; ✓ представить наглядную визуализацию данных	
менее 50 баллов	«неудовлетворительно»	ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач	ОПК-2.1. Использует основные методы, средства получения, представления, хранения и обработки статистических данных	Не знает на базовом уровне: ✓ методы поиска и систематизации информации об экономических процессах и явлениях Не умеет на базовом уровне: ✓ работать с национальными и международными базами данных с целью поиска информации, необходимой для решения поставленных экономических задач; ✓ рассчитывать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы; ✓ представить наглядную визуализацию данных	Компетенции не сформированы