

**ПРОЕКТ**

## Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

### Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2023 года по МАТЕМАТИКЕ

**Профильный уровень**

подготовлен федеральным государственным бюджетным  
научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Антипова Наталья Викторовна  
Должность: и.о. директора филиала  
Дата подписания: 20.02.2024 18:49:52  
Уникальный программный ключ:  
fae5412acb1bf810dc69e6bc004ac45622b84b3a

## Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

### Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2023 года по МАТЕМАТИКЕ

#### Профильный уровень

При ознакомлении с демонстрационным вариантом контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена (ЕГЭ) 2023 г. следует иметь в виду, что задания, включённые в него, не отражают всех элементов содержания, которые будут проверяться с помощью вариантов КИМ в 2023 г. Полный перечень элементов содержания, которые могут контролироваться на едином государственном экзамене 2023 г., приведён в кодификаторе элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена 2023 г. по математике.



**В демонстрационном варианте представлены конкретные примеры заданий, не исчерпывающие всего многообразия возможных формулировок заданий на каждой позиции варианта экзаменационной работы.**

Назначение демонстрационного варианта заключается в том, чтобы дать возможность любому участнику ЕГЭ и широкой общественности составить представление о структуре будущих КИМ, количестве заданий, об их форме и уровне сложности.

Приведённые критерии оценки выполнения заданий с развёрнутым ответом, включённые в этот вариант, дают представление о требованиях к полноте и правильности записи развёрнутого ответа.

**В демонстрационном варианте представлено по несколько примеров заданий на некоторые позиции экзаменационной работы. В реальных вариантах экзаменационной работы на каждую позицию будет предложено только одно задание.**

Эти сведения позволят выпускникам выработать стратегию подготовки к ЕГЭ в 2023 г.

**Демонстрационный вариант  
контрольных измерительных материалов  
единого государственного экзамена 2023 года  
по МАТЕМАТИКЕ**

**Профильный уровень**

**Инструкция по выполнению работы**

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

-	0	,	8																	
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

**Желаем успеха!**

**Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

*Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

- 1** Треугольник  $ABC$  вписан в окружность с центром  $O$ . Угол  $BAC$  равен  $32^\circ$ . Найдите угол  $BOC$ . Ответ дайте в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Площадь треугольника  $ABC$  равна 24;  $DE$  – средняя линия, параллельная стороне  $AB$ . Найдите площадь треугольника  $CDE$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

В ромбе  $ABCD$  угол  $DBA$  равен  $13^\circ$ . Найдите угол  $BCD$ . Ответ дайте в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

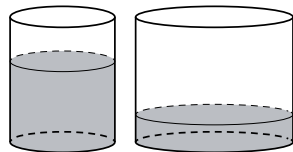
**ИЛИ**

Стороны параллелограмма равны 24 и 27. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 18. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.

Ответ: \_\_\_\_\_.

2

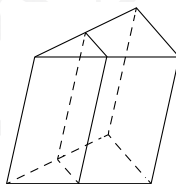
В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого. На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

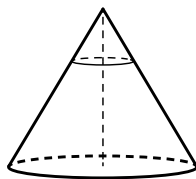
Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Через точку, лежащую на высоте прямого кругового конуса и делящую её в отношении 1:2, считая от вершины конуса, проведена плоскость, параллельная его основанию и делящая конус на две части. Каков объём той части конуса, которая примыкает к его основанию, если объём всего конуса равен 54?



Ответ: \_\_\_\_\_.

3

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене выпускнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Вероятность того, что мотор холодильника прослужит более 1 года, равна 0,8, а вероятность того, что он прослужит более 2 лет, равна 0,6. Какова вероятность того, что мотор прослужит более 1 года, но не более 2 лет?

Ответ: \_\_\_\_\_.

4

Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

В городе 48 % взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6 % взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15 %. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Ответ: \_\_\_\_\_.

5 Найдите корень уравнения  $3^{x-5} = 81$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Найдите корень уравнения  $\sqrt{3x+49} = 10$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Найдите корень уравнения  $\log_8(5x+47) = 3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Решите уравнение  $\sqrt{2x+3} = x$ . Если корней окажется несколько, то в ответе запишите наименьший из них.

Ответ: \_\_\_\_\_.

6 Найдите  $\sin 2\alpha$ , если  $\cos \alpha = 0,6$  и  $\pi < \alpha < 2\pi$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Найдите значение выражения  $16 \log_7 \sqrt[4]{7}$ .

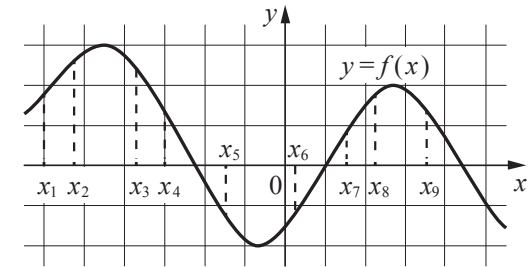
Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Найдите значение выражения  $4^{\frac{1}{5}} \cdot 16^{\frac{9}{10}}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

7 На рисунке изображён график дифференцируемой функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечены девять точек:  $x_1, x_2, \dots, x_9$ .

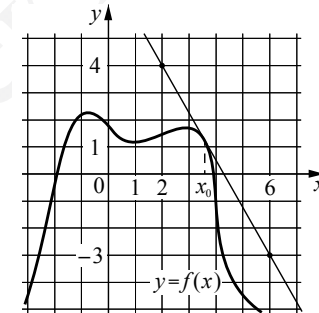


Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции  $f(x)$  отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

8 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением

$$v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где  $c = 1500$  м/с – скорость звука в воде,  $f_0$  – частота испускаемого сигнала (в МГц),  $f$  – частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Ответ: \_\_\_\_\_.

9 Весной катер идёт против течения реки в  $1\frac{2}{3}$  раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в  $1\frac{1}{2}$  раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Смешав 45%-ный и 97%-ный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62%-ный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 72%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 45%-ного раствора использовали для получения смеси?

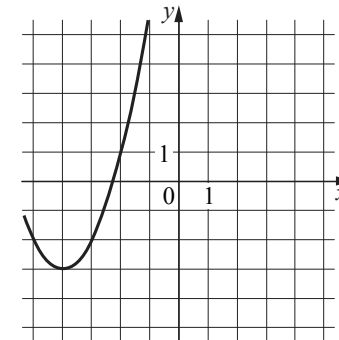
Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 70 км/ч по прямому шоссе, обгоняет другой автомобиль, движущийся в ту же сторону с постоянной скоростью 40 км/ч. Каким будет расстояние (в километрах) между этими автомобилями через 15 минут после обгона?

Ответ: \_\_\_\_\_.

10 На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые. Найдите значение  $f(-12)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

11 Найдите наименьшее значение функции  $y = 9x - 9\ln(x + 11) + 7$  на отрезке  $[-10, 5; 0]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Найдите точку максимума функции  $y = (x + 8)^2 \cdot e^{3-x}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**ИЛИ**

Найдите точку минимума функции  $y = -\frac{x}{x^2 + 256}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.



**Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**

**Часть 2**

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте **БЛАНК ОТВЕТОВ № 2**. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 12 а) Решите уравнение

$$2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos 2x = \sqrt{3} \cos x + 1.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$ .

- 13 Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  имеют длину 6. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $AA_1$  и  $A_1C_1$  соответственно.

- а) Докажите, что прямые  $BM$  и  $MN$  перпендикулярны.  
 б) Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $ABB_1$ .

- 14 Решите неравенство  $\log_{11} (8x^2 + 7) - \log_{11} (x^2 + x + 1) \geq \log_{11} \left( \frac{x}{x+5} + 7 \right)$ .

- 15 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  – целое число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1,0	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

- 16 Две окружности касаются внешним образом в точке  $K$ . Прямая  $AB$  касается первой окружности в точке  $A$ , а второй – в точке  $B$ . Прямая  $BK$  пересекает первую окружность в точке  $D$ , прямая  $AK$  пересекает вторую окружность в точке  $C$ .

- а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $BC$  параллельны.  
 б) Найдите площадь треугольника  $AKB$ , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

- 17 Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 18 В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

- а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?  
 б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?  
 в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

**Система оценивания экзаменационной работы по математике  
(профильный уровень)**

Правильное выполнение каждого из заданий 1–11 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ			
	Пример 1	Пример 2	Пример 3	Пример 4
1	64	6	154	16
2	4	12	52	
3	0,08	0,2		
4	0,6	0,1		
5	9	17	93	3
6	-0,96	4	16	
7	4	-1,75		
8	751			
9	5	15	7,5	
10	61			
11	-83	-6	16	

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий  
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

**12** а) Решите уравнение

$$2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos 2x = \sqrt{3} \cos x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$ .

**Решение.** а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x + 1 - 2 \sin^2 x = \sqrt{3} \cos x + 1; \sin x - 2 \sin^2 x = 0; \sin x \cdot (2 \sin x - 1) = 0.$$

Значит,  $\sin x = 0$ , откуда  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ , или  $\sin x = \frac{1}{2}$ , откуда  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ,

или  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ .

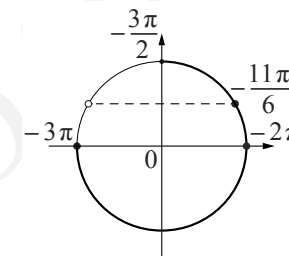
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[ -3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$ .

Получим числа:  $-3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}$ .

**Ответ:** а)  $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}.$$



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	
	2

- 13** Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  имеют длину 6. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $AA_1$  и  $A_1C_1$  соответственно.  
 а) Докажите, что прямые  $BM$  и  $MN$  перпендикулярны.  
 б) Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $ABB_1$ .

**Решение.** а) Пусть точка  $H$  – середина  $AC$ . Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем  $BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63$ , тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник  $BMN$  является прямоугольным с прямым углом  $M$ .

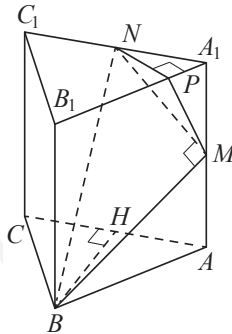
б) Проведём перпендикуляр  $NP$  к прямой  $A_1B_1$ . Тогда  $NP \perp A_1B_1$  и  $NP \perp A_1A$ . Следовательно,  $NP \perp ABB_1$ . Поэтому  $MP$  – проекция  $MN$  на плоскость  $ABB_1$ .

Прямая  $BM$  перпендикулярна  $MN$ , тогда по теореме о трёх перпендикулярах  $BM \perp MP$ . Следовательно, угол  $NMP$  – линейный угол искомого угла.

Длина  $NP$  равна половине высоты треугольника  $A_1B_1C_1$ , т.е.  $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

Поэтому  $\sin \angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ . Следовательно,  $\angle NMP = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$ .

**Ответ:** б)  $\arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$ .



- 14** Решите неравенство  $\log_{11}(8x^2 + 7) - \log_{11}(x^2 + x + 1) \geq \log_{11}\left(\frac{x}{x+5} + 7\right)$ .

**Решение.** Правая часть неравенства определена при  $x < -5$  и  $x > -\frac{35}{8}$ .

Поскольку при любых значениях  $x$  выражение  $8x^2 + 7$  принимает положительные значения, при  $x < -5$  и  $x > -\frac{35}{8}$  неравенство принимает вид:

$$\frac{8x^2 + 7}{x^2 + x + 1} \geq \frac{8x + 35}{x + 5}; \frac{8x^3 + 40x^2 + 7x + 35}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \geq \frac{8x^3 + 43x^2 + 43x + 35}{(x + 5)(x^2 + x + 1)};$$

$$\frac{3x^2 + 36x}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \leq 0; \frac{3x(x + 12)}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \leq 0,$$

откуда  $x \leq -12$ ;  $-5 < x \leq 0$ . Учитывая ограничения  $x < -5$  и  $x > -\frac{35}{8}$ ,

получаем:  $x \leq -12$ ;  $-\frac{35}{8} < x \leq 0$ .

**Ответ:**  $(-\infty; -12]$ ;  $(-\frac{35}{8}; 0]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $-12$ и/или $0$ , ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , ИЛИ при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3



- 15** 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  – целое число;
  - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
  - 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1,0	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

**Решение.** По условию долг перед банком (в млн рублей) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:  
1; 0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0.

Пусть  $k = 1 + \frac{r}{100}$ , тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k; 0,6k; 0,4k; 0,3k; 0,2k; 0,1k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k - 0,6; 0,6k - 0,4; 0,4k - 0,3; 0,3k - 0,2; 0,2k - 0,1; 0,1k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) - (0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) = \\ = (k - 1)(1 + 0,6 + 0,4 + 0,3 + 0,2 + 0,1) + 1 = 2,6(k - 1) + 1.$$

По условию общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей, значит,

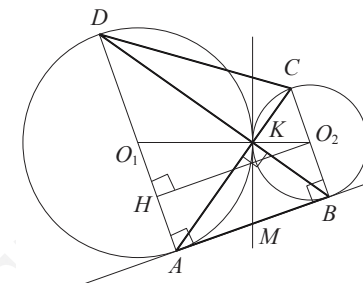
$$2,6(k - 1) + 1 < 1,2; 2,6 \cdot \frac{r}{100} + 1 < 1,2; r < 7 \frac{9}{13}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства – число 7. Значит, искомое число процентов – 7.

**Ответ:** 7.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 16** Две окружности касаются внешним образом в точке  $K$ . Прямая  $AB$  касается первой окружности в точке  $A$ , а второй – в точке  $B$ . Прямая  $BK$  пересекает первую окружность в точке  $D$ , прямая  $AK$  пересекает вторую окружность в точке  $C$ .
- а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $BC$  параллельны.  
б) Найдите площадь треугольника  $AKB$ , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



**Решение.** а) Обозначим центры окружностей  $O_1$  и  $O_2$  соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке  $K$ , пересекает  $AB$  в точке  $M$ . По свойству касательных, проведённых из одной точки,  $AM = KM$  и  $KM = BM$ . Треугольник  $AKB$ , у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.

Вписанный угол  $AKD$  прямой, поэтому он опирается на диаметр  $AD$ . Значит,  $AD \perp AB$ . Аналогично получаем, что  $BC \perp AB$ . Следовательно, прямые  $AD$  и  $BC$  параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая – радиус 1.

Треугольники  $BKC$  и  $AKD$  подобны,  $\frac{AD}{BC} = 4$ . Пусть  $S_{BKC} = S$ , тогда  $S_{AKD} = 16S$ .

У треугольников  $AKD$  и  $AKB$  общая высота, следовательно,  $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$ , т.е.  $S_{AKB} = 4S$ . Аналогично  $S_{CKD} = 4S$ . Площадь трапеции  $ABCD$  равна  $25S$ .

Вычислим площадь трапеции  $ABCD$ . Проведём к  $AD$  перпендикуляр  $O_2H$ , равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника  $O_2HO_1$ :

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно,  $25S = 20$ , откуда  $S = 0,8$  и  $S_{AKB} = 4S = 3,2$ .

**Ответ:** 3,2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , ИЛИ при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

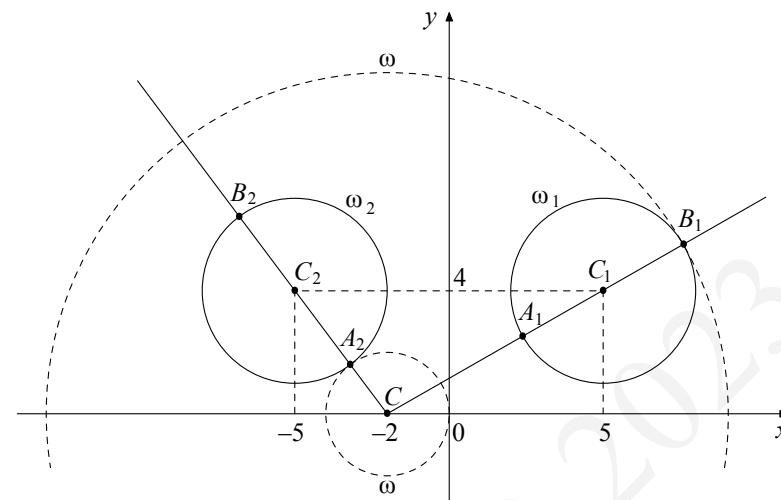
17 Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**Решение.** Если  $x \geq 0$ , то уравнение  $(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$  задаёт окружность  $\omega_1$  с центром в точке  $C_1(5; 4)$  и радиусом 3, а если  $x < 0$ , то оно задаёт окружность  $\omega_2$  с центром в точке  $C_2(-5; 4)$  и таким же радиусом (см. рисунок).

При положительных значениях  $a$  уравнение  $(x + 2)^2 + y^2 = a^2$  задаёт окружность  $\omega$  с центром в точке  $C(-2; 0)$  и радиусом  $a$ . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения  $a$ , при каждом из которых окружность  $\omega$  имеет единственную общую точку с объединением окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .



Из точки  $C$  проведём луч  $CC_1$  и обозначим через  $A_1$  и  $B_1$  точки его пересечения с окружностью  $\omega_1$ , где  $A_1$  лежит между  $C$  и  $C_1$ . Так как

$$CC_1 = \sqrt{(5+2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}, \text{ то } CA_1 = \sqrt{65} - 3, CB_1 = \sqrt{65} + 3.$$

При  $a < CA_1$  или  $a > CB_1$  окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  не пересекаются.

При  $CA_1 < a < CB_1$  окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  имеют две общие точки.

При  $a = CA_1$  или  $a = CB_1$  окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  касаются.

Из точки  $C$  проведём луч  $CC_2$  и обозначим через  $A_2$  и  $B_2$  точки его пересечения с окружностью  $\omega_2$ , где  $A_2$  лежит между  $C$  и  $C_2$ . Так как

$$CC_2 = \sqrt{(-5+2)^2 + 4^2} = 5, \text{ то } CA_2 = 5 - 3 = 2, CB_2 = 5 + 3 = 8.$$

При  $a < CA_2$  или  $a > CB_2$  окружности  $\omega$  и  $\omega_2$  не пересекаются.

При  $CA_2 < a < CB_2$  окружности  $\omega$  и  $\omega_2$  имеют две общие точки.

При  $a = CA_2$  или  $a = CB_2$  окружности  $\omega$  и  $\omega_2$  касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность  $\omega$  касается ровно одной из двух окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и не пересекается с другой. Так как  $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$ , то условию задачи удовлетворяют только числа  $a = 2$  и  $a = \sqrt{65} + 3$ .

**Ответ:** 2;  $\sqrt{65} + 3$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

18

В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

**Решение.** а) Пусть в школе № 1 писали тест 2 учащихся, один из них набрал 1 балл, а второй набрал 19 баллов и перешёл в школу № 2. Тогда средний балл в школе № 1 уменьшился в 10 раз.

б) Пусть в школе № 2 писали тест  $m$  учащихся, средний балл равнялся  $B$ , а перешедший в неё учащийся набрал  $u$  баллов. Тогда получаем:

$$u = 0,9(m+1)B - mB; 10u = (9-m)B.$$

Если  $B=7$ , то  $(9-m)B$  не делится на 10, а  $10u$  делится на 10. Но это невозможно, поскольку  $10u = (9-m)B$ .

в) Пусть в школе № 1 средний балл равнялся  $A$ . Тогда получаем:

$$u = (9-m)A - 0,9(8-m)A; 10u = (18-m)A = (9-m)B.$$

Заметим, что если  $B=1$  или  $B=3$ , то  $10u = (9-m)B$  не делится на 10. Если  $B=2$  или  $B=4$ , то  $m=4$ . В первом случае  $14A=10$ , а во втором  $14A=20$ . Значит, ни один из этих случаев не возможен.

При  $B=5$  и  $m=3$  получаем  $u=3$  и  $A=2$ . Этот случай реализуется, например, если в школе № 1 писали тест 6 учащихся, 3 из них набрали по 1 баллу, а 3 – по 3 балла, в школе № 2 писали тест 3 учащихся и каждый набрал по 5 баллов, а у перешедшего из одной школы в другую учащегося – 3 балла.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ , $b$ и $v$	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте $v$ и обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах $a$ и $b$ ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $v$	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте $a$ или $b$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнанадзора от 07.11.2018 № 190/1512, зарегистрирован Минюстом России 10.12.2018 № 52952)

«82. <...> По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют баллы за каждый ответ на задания экзаменационной работы ЕГЭ с развёрнутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения.

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 12–18, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 12–18, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 12–18 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.